

INFLUÊNCIA DOS RUIDOS ADITIVOS NA DECONVOLUÇÃO PREDITIVA

THE INFLUENCE OF ADDITIVE NOISE ON PREDICTIVE DECONVOLUTION

Oswaldo de Oliveira Duarte⁽¹⁾

RESUMO — Este trabalho analisa como o ruído aditivo afeta o desempenho da deconvolução preditiva. Uma das mais importantes conclusões é a de que a presença do ruído aditivo tem, em geral, um efeito altamente deletério sobre os resultados. É também mostrado que a autocorrelação do traço de saída não é um diagnóstico confiável da eficiência do método. A discussão é ilustrada por meio de seis exemplos que mostram como diferentes combinações de sinal e de ruído afetam os resultados.

(Originais recebidos em 24.07.89.)

ABSTRACT — *The effect of additive noise on the performance of predictive deconvolution is analyzed. One of the most important conclusions is that the presence of additive noise seriously damages results. It is also shown that autocorrelation of the output trace is not reliable as a measurement of methodological efficiency. Six examples illustrate how results are affected by different combinations of signal and noise.*

(Expanded abstract available at the end of the paper.)

1 — INTRODUÇÃO

A deconvolução preditiva é um procedimento estatístico cujas origens remontam ao trabalho de Wiener (1942). Seus princípios foram estabelecidos entre 1952 e 1957 pelo Geophysical Analysis Group (GAG) do Instituto de Tecnologia de Massachussets, através de trabalhos como os de Wadsworth *et al.* (1953) e Robinson (1954). Sua aplicação nos dados de reflexão sísmica visa, fundamentalmente, à eliminação de efeitos indesejáveis de natureza convolucional. Aos interessados nos detalhes computacionais do método, recomenda-se o trabalho de Peacock & Treitel (1969).

2 — MODELO SEM RUIDO ADITIVO

A deconvolução preditiva baseia-se em um modelo relativamente simples que pode ser representado por:

$$S(t) = R(t) * W(t) \quad (1)$$

onde:

* = operação de convolução;

S(t) = registro sísmico;
R(t) = função refletividade;
W(t) = efeito indesejável.

Conforme demonstrado por Peacock & Treitel (1969), o filtro preditivo de erro F(t), determinado a partir da autocorrelação de S(t), pode, dentro de certos pressupostos, ser considerado como proporcional ao filtro inverso de W(t), sendo o traço deconvolvido determinado por:

$$SD(t) = S(t) * F(t) \quad (2)$$

Um aspecto importante da deconvolução preditiva está no fato de que apenas a autocorrelação do traço registrado participa do cálculo de F(t), não sendo necessário o conhecimento explícito de W(t). A validade do método depende de quatro hipóteses:

- a) a Terra é um sistema linear e invariante;
- b) R(t) é uma função de espectro de potência branco;
- c) W(t) é uma função de fase mínima;
- d) o registro não contém ruído aditivo.

Ainda que este esquema funcione bem

1 - Setor de Desenvolvimento em Geociências (SEDGEO), Centro de Ensino Sudeste (CEN-SUD), Serviço de Desenvolvimento de Recursos Humanos (SEDES), Praça Mahatma Gandhi, 14, Centro, CEP 20031, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

com dados sintéticos, a sua aplicação a dados reais deixa, geralmente, muito a desejar, pois as hipóteses acima excluem efeitos fisicamente relevantes. Uma das mais discutíveis é a que considera o registro sísmico isento de ruído aditivo.

3 - MODELO COM RUÍDO ADITIVO

A expressão (3) mostra um modelo mais realístico do traço sísmico, contendo uma certa quantidade de ruído aditivo $N(t)$.

$$X(t) = R(t) * W(t) + N(t) = S(t) + N(t) \quad (3)$$

Dado que $F(t)$ depende apenas da autocorrelação do traço registrado, pode-se demonstrar (ver apêndice) que:

$$|SD(f)|^2 = k / (1 + |N(f)|^2 / |S(f)|^2) \quad (4)$$

e

$$|ND(f)|^2 + |SD(f)|^2 = k \quad (5)$$

onde:

$ND(f)$ = espectro de amplitude do ruído deconvolvido;

$SD(f)$ = espectro de amplitude do sinal deconvolvido;

k = fator que pode ser considerado como tendo um valor unitário.

As equações (4) e (5) mostram que o espectro de potência do traço deconvolvido é sempre branco e que o sinal e o ruído apresentam espectros de potência complementares no traço deconvolvido. Estas conclusões independem das hipóteses fundamentais.

Exemplos

As equações (4) e (5) permitem simular inúmeras situações de interesse para o processamento. Como o objetivo da deconvolução é recuperar a função refletividade $R(t)$ e esta tem, de acordo com a segunda hipótese, o espectro de potência branco, o espectro de potência do sinal deconvolvido (não confundir com o traço deconvolvido) deve ser branco. O não-cumprimento desta condição

indica, portanto, uma falha do processo. Os exemplos da figura 2 foram obtidos a partir das equações (4) e (5). Cada um é formado por quatro gráficos, conforme esquematizado na figura 1.

Como se pode ver, apenas em dois casos (1 e 3) os resultados podem ser considerados satisfatórios, ambos envolvendo condições pouco comuns nos levantamentos reais.

No exemplo 1, o nível de ruído é extremamente baixo e o resultado, como era de se esperar, é bom. No exemplo 2, a presença de ruído branco na entrada causou uma inibição parcial da deconvolução. No exemplo 3, o ruído aditivo não afetou a deconvolução. Este comportamento curioso se deve ao fato de o espectro de potência do ruído aditivo ser proporcional ao espectro de potência do sinal no traço de entrada. Como a autocorrelação do traço de entrada é proporcional à autocorrelação de $S(t)$, o filtro preditivo de erro calculado é o mesmo que seria obtido se não houvesse ruído aditivo. Este exemplo mostra que a hipótese da ausência de ruído aditivo poderia ser substituída por aquela em que o espectro de potência de $N(t)$ seria proporcional ao espectro de potência de

$S(t)$. No exemplo 4, a ação da deconvolução foi totalmente inibida, sendo o traço de saída uma repetição do traço de entrada. A razão para este resultado é que o ruído de entrada tem o espectro de potência complementar ao do sinal, sendo, portanto, branco o espectro de potência do traço de entrada. Conseqüentemente, a autocorrelação do traço de entrada será uma função delta e o filtro preditivo de erro um mero fator de escala. Apesar de o sinal de entrada ser fortemente colorido, a ação da deconvolução foi nula. Dado que o traço deconvolvido apresenta sempre o espectro de potência branco, este exemplo demonstra que não se pode melhorar o resultado da deconvolução pela iteração do processo, isto é, por meio de uma segunda deconvolução em cascata. O exemplo 5 mostra um sinal de entrada colorido associado a um ruído também colorido, uma situação comumente encontrada nos levantamentos reais. O resultado não foi satisfatório. A metade superior do espectro de $SD(t)$ foi particularmente prejudicada pelo aumento do nível do ruído e pelo aparecimento de um "obelisco" de grande amplitude. O exemplo 6 é muito interessante, pois, como o sinal de entrada já apresenta o espectro de potência branco, ele não

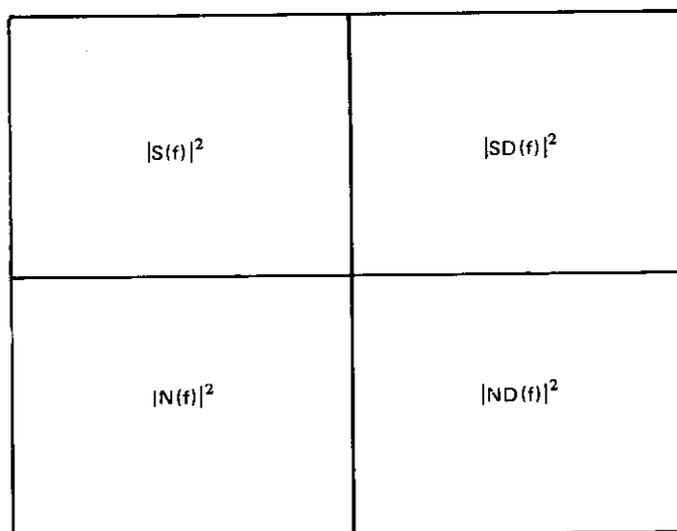


Fig. 1 - Esquema da disposição de $|S(f)|^2$, $|N(f)|^2$, $|SD(f)|^2$ e $|ND(f)|^2$ nos exemplos da figura 1.

Fig. 1 - Diagram of $|S(f)|^2$, $|N(f)|^2$, $|SD(f)|^2$, and $|ND(f)|^2$ for the examples in figure 1.

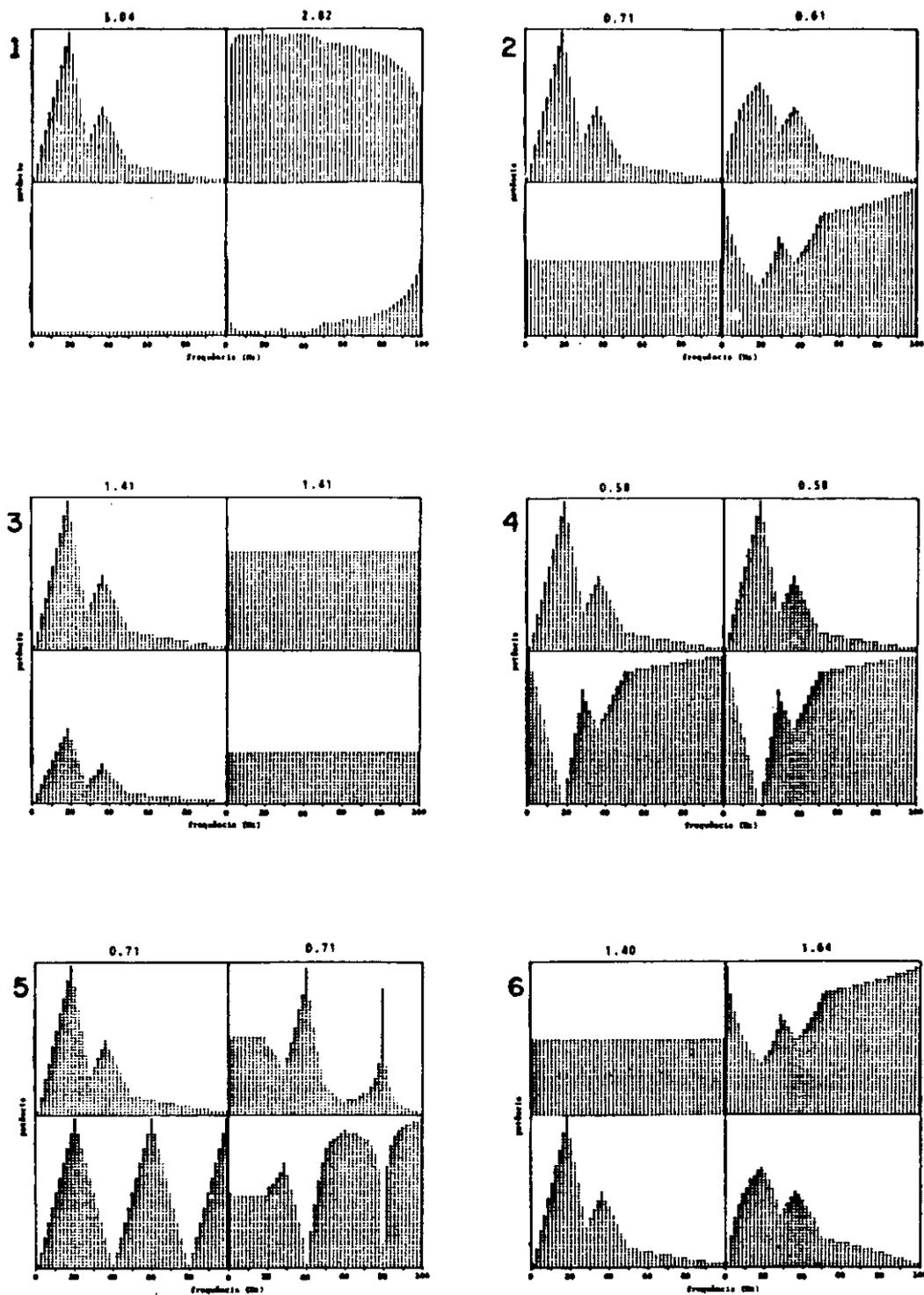


Fig. 2 - Exemplos da aplicação das equações (4) e (5) para diversas combinações de sinal e ruído no traço de entrada. Veja a figura 1 para a identificação dos espectros de potência em cada exemplo.

Fig. 2 - Examples showing the results of equations (4) and (5) applied to several combinations of signal and noise in the input trace. See figure 1 for diagrams of the power spectra in each example.

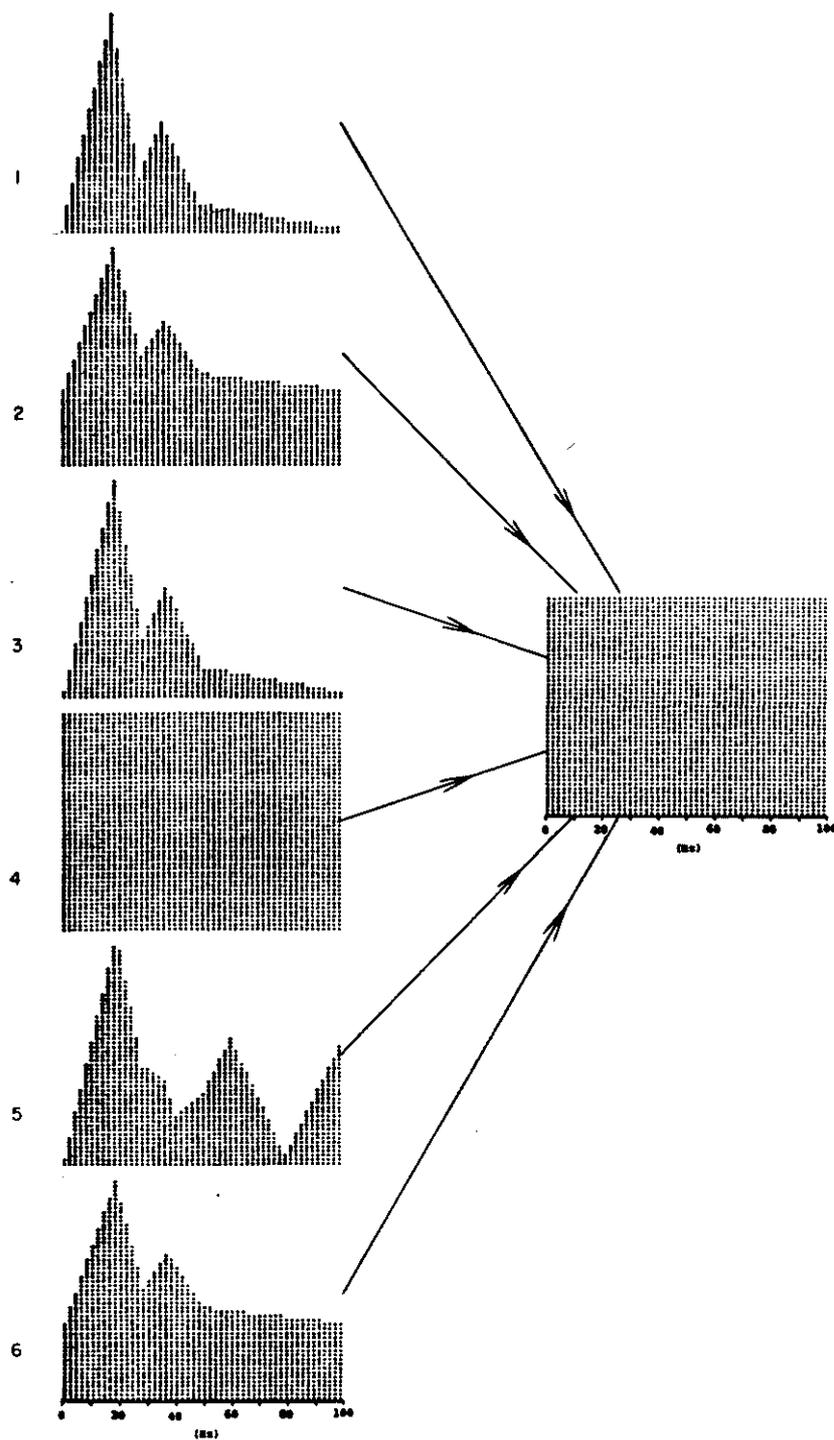


Fig. 3 - Balançamento espectral relacionado com os exemplos da figura 2. Os espectros de potência da esquerda se referem aos traços de entrada ($|S(f)|^2 + |N(f)|^2$). O espectro de potência da direita corresponde ao traço deconvolvido ($|SD(f)|^2 + |ND(f)|^2$).

Fig. 3 - Spectral balance related to the examples in figure 2. The power spectra on the left refer to the input traces ($|S(f)|^2 + |N(f)|^2$). The power spectrum on the right refers to the deconvolved trace ($|SD(f)|^2 + |ND(f)|^2$).

necessária de deconvolução. Mais uma vez, o resultado não foi satisfatório. Este exemplo mostra, claramente, que a deconvolução preditiva pode se degenerar, funcionando como uma fonte de efeitos indesejáveis, quando os dados registrados estão contaminados com ruído aditivo.

Os exemplos da figura 2 permitem, também, chegar-se a algumas conclusões sobre a variação da relação sinal-ruído (cujos valores estão anotados no topo de cada exemplo). Conforme demonstrado no apêndice, a relação sinal-ruído em cada frequência não é alterada pela deconvolução. Como, porém, nos levantamentos reais as maiores taxas de amplificação relativa recaem, geralmente, sobre as frequências com baixa relação sinal-ruído, a relação sinal-ruído do traço deconvolvido é, geralmente, menor que a do traço de entrada. Os exemplos da figura 2 sugerem que, aparentemente, não há paralelismo entre a eficiência da deconvolução e a variação da relação sinal-ruído.

4 — INFLUÊNCIA DO TIPO DE RUÍDO

A influência dos ruídos aditivos na deconvolução preditiva depende muito do seu espectro de potência. Um ruído perfeitamente branco, conforme ilustrado no exemplo 2 da figura 2, produz uma inibição do processo de deconvolução que é inversamente proporcional à relação sinal-ruído. Dado que este tipo de ruído afeta apenas o coeficiente central da autocorrelação do traço de entrada, a sua influência poderia ser eliminada dividindo-se o valor do coeficiente central da autocorrelação por $1 + 1/RSR$, onde RSR representa a relação sinal-ruído. Na prática, como geralmente não se conhece o valor da relação sinal-ruído e o ruído aditivo nunca é perfeitamente branco, esta correção não pode ser feita. Na realidade, a maioria dos centros de processamento fazem justamente o contrário, ou seja, aumentam o valor do coeficiente central da autocorrelação, a fim de evitar que as componentes de frequência que não existem no sinal mas que fazem parte do ruído aditivo sejam exageradamente amplificadas.

Os ruídos coloridos, por outro lado, afetam toda a extensão da autocorrelação do traço de entrada e podem causar grandes transtornos aos resultados. Diferentemente dos ruídos brancos, a influência dos ruídos coloridos não depende apenas da relação sinal-ruído, mas, também, da diferença de formas entre os espectros de potência do sinal e do ruído. Assim, conforme ilustrado no exemplo 3 da figura 2, se o espectro de potência do ruído aditivo for proporcional ao espectro de potência do sinal, a sua influência será nula. Nos casos mais comuns em que o ruído aditivo, além de colorido, não tem o espectro de potência proporcional ao do sinal, a eficiência da deconvolução ficará reduzida, dentro de uma gama variável, conforme ilustrado pelos exemplos 4, 5 e 6 da figura 2.

5 — USO DA AUTOCORRELAÇÃO DO TRAÇO DE SAÍDA COMO DIAGNÓSTICO

Outro ponto importante diz respeito ao uso da autocorrelação do traço deconvolvido como diagnóstico da eliminação dos efeitos indesejáveis. A análise feita neste trabalho demonstra que esse procedimento não tem fundamento. A deconvolução preditiva pode ser considerada como um processo de balanceamento automático do espectro de potência dos dados, por meio de um operador de fase mínima. Dado que, para uma predição unitária, a saída desejada equivale a uma função delta, o espectro de potência do traço de saída será sempre branco, conforme ilustrado na figura 3. Logo, o fato da autocorrelação do traço de saída tender para uma função delta é uma decorrência do balanceamento espectral dos dados, nada tendo a haver com a correção dos efeitos indesejáveis. É oportuno mencionar que certas circunstâncias não discutidas neste trabalho podem fazer com que a autocorrelação do traço deconvolvido se afaste de uma função delta. As principais são o uso de mais de uma amostra para a predição, o uso de um fator de estabilização ("luz branca") muito elevado e a especificação de um comprimento muito pequeno para $F(t)$.

6 — SUMARIO DAS CONCLUSÕES

A presença de ruído aleatório nos dados de reflexão sísmica tem, em geral, uma ação bastante negativa sobre os resultados da deconvolução preditiva. Dado que os ruídos aditivos estão sempre presentes nos levantamentos reais, pode-se concluir que a atuação da deconvolução preditiva é discutível, mesmo para a eliminação de efeitos indesejáveis simples. A deconvolução preditiva pode ser descrita como um processo de balanceamento automático do espectro de potência dos dados, por meio de um operador de fase mínima. No caso da predição unitária, o espectro de potência do traço de saída será sempre branco, independentemente dos efeitos indesejáveis terem ou não sido corrigidos. A autocorrelação do traço de saída não tem valor como diagnóstico pela simples razão que ela tende sempre para uma função delta. Ainda que um baixo nível de ruído seja sempre benéfico, não existe uma relação direta entre o nível de ruído aditivo presente nos dados de entrada e a eficiência da deconvolução.

AGRADECIMENTOS

Ao revisor Dr. Joarez Fagundes Tessis pelas valiosas sugestões; à Regina Maria Gaspar pelos trabalhos de edição e à Angela Maria Vilela Godoy pela cessão dos recursos computacionais do Setor de Pessoal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRACEWELL, R. N. 1986. *The Fourier transform and its applications*. 2. ed. New York, McGraw-Hill. p. 115.
- PEACOCK, K. L. & TREITEL, S. 1969. Predictive deconvolution: theory and practice. *Geophysics*, 34: 155-69.
- ROBINSON, E. A. 1954. *Predictive decomposition of time series with applications to seismic exploration*. Cambridge, Mass., MIT Press. Ph. D. Thesis.
- ROBINSON, E. A. & TREITEL, S. 1988. *Geophysical signal analysis*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.
- WADSWORTH, G. P.; ROBINSON, E. A.; BRYAN, J. G.; HURLEY, P. M. 1953. Detection of reflection

on seismic records by linear operators. *Geophysics*, 18: 539-86.
WIENER, N. 1942. *The extrapolation,*

interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications. Cambridge, Mass.,

MIT Press. Cambridge MIT DIC Contract 6037, National Defense Research Council (section 02).

EXPANDED ABSTRACT

Predictive deconvolution, as described by Peacock & Treitel (1969), is based on a relatively simple model that can be represented as:

$$S(t) = R(t) * W(t), \quad (1)$$

where * denotes the convolution operation; $S(t)$, the seismic record; $R(t)$, the reflectivity function; and $W(t)$, an undesired effect of convolutional nature. The deconvolution operator $F(t)$ is a causal function computed from the autocorrelation of $S(t)$ and may, in line with certain premises, be considered proportional to the inverse filter of the undesired effect $W(t)$. Therefore, the deconvolved trace may be expressed as:

$$SD(t) = S(t) * F(t). \quad (2)$$

One important point regarding predictive deconvolution is that only the autocorrelation of the input trace participates in the computation of $F(t)$. This scheme is based on the following hypotheses:

1. The Earth is a linear and invariant system.
2. The power spectrum of $R(t)$ is white.
3. $W(t)$ is a minimum phase function.
4. The recorded trace is free from additive noise.

Even though this scheme works well with synthetic data, its application to real data generally leaves much to be desired, since the above hypotheses exclude relevant physical effects. One of the more debatable points is that the seismic record is considered to be free of additive noise. Expression (3) shows a more realistic model of the seismic trace, including a certain amount of additive noise ($N(t)$):

$$X(t) = R(t) * W(t) + N(t) = S(t) + N(t). \quad (3)$$

Bearing in mind that $F(t)$ depends on the autocorrelation of the recorded trace only, it can be demonstrated (see Appendix) that:

$$|SD(f)|^2 = k / (1 + |N(f)|^2 / |S(f)|^2) \quad (4)$$

and

$$|ND(f)|^2 + |SD(f)|^2 = k, \quad (5)$$

where $ND(t)$ and $SD(t)$ represent the deconvolved versions of $N(t)$ and $S(t)$, while k is a scalar which in the course of this analysis may be considered equal to 1. Equations (4) and (5) show that the power spectrum of the deconvolved trace is always white, the power spectrum of the deconvolved signal being the complement of the power spectrum of the deconvolved noise. It is important to note that these conclusions hold true even if the fundamental hypotheses are violated.

Equations (4) and (5) permit the simulation of many interesting situations related to the processing of reflection seismic data. As the objective of deconvolution is to recover $R(t)$ and as this function displays, according to the second hypothesis, a white power spectrum, then the deconvolved signal (do not confuse it with the deconvolved trace) should be white. Any deviation from this may be regarded as a failure in the process. The use of equations (4) and (5) is illustrated by six examples in figure 2.

In example 1, the level of additive noise is very low and the result, as expected, is good. In 2, the presence of noise caused partial inhibition of deconvolution. In 3, deconvolution appears to be undisturbed by noise. This curious result comes from the fact that the power spectrum of the additive noise is proportional to the power

spectrum of the input signal. In 4, deconvolution was totally inhibited, and the output trace is a replica of the input trace. This is because the power spectrum of the additive noise is the complement of the power spectrum of the signal in the input trace. Consequently, the input trace has a white power spectrum and an autocorrelation equivalent to a delta function, making the operator $F(t)$ a mere scalar factor. Since the power spectrum of the deconvolved trace is always white, this example shows that predictive deconvolution can not be improved by iteration, that is, by application of a second deconvolution to the output of the first deconvolution. In 5, a colored signal is associated to a colored noise, a situation often encountered in real seismic data. The result is not good. The left side of the power spectra related to $SD(t)$ and $ND(t)$ shows that the output trace was severely impacted by the reduction of the signal-to-noise ratio and by the presence of high amplitude spikes. Example 6 is very interesting in that the input signal has a white power spectrum and thus it would not have to be deconvolved. Again, the result is not good. This example very clearly shows that predictive deconvolution may act as a source of undesired effects when the recorded data are contaminated by additive noise.

In short, it can be said that additive noise has a deleterious effect on predictive deconvolution. Since additive noise is always present in real seismic data, the ability of predictive deconvolution to eliminate even simple undesired effects is a debatable question. At the same time, the fact that the power spectrum of the deconvolved trace is always white makes diagnoses based on the autocorrelation of the output trace unreliable, simply because this autocorrelation always tends to a delta function.

APÊNDICE

Demonstração das fórmulas

O traço de reflexão sísmica será considerado em três versões distintas:

$$S(t) = R(t) * W(t) \quad (1)$$

$$X(t) = R(t) * W(t) + N(t) = S(t) + N(t) \quad (2)$$

$$Y(t) = R(t) * W(t) * L(t) = S(t) * L(t) \quad (3)$$

onde:

$S(t)$ = modelo sem ruído aditivo;

$X(t)$ = modelo com ruído aditivo $N(t)$;

$Y(t)$ = modelo equivalente a $X(t)$ em termos de autocorrelações, no qual $L(t)$ é um efeito convolucional correspondente a $N(t)$.

Além das funções $S(t)$, $X(t)$ e $Y(t)$, será, também, considerada uma função $U(t)$ de fase mínima, de forma tal que as autocorrelações de $X(t)$, $Y(t)$ e $U(t)$ sejam iguais, ou seja:

$$U(t) * U(-t) = X(t) * X(-t) = Y(t) * Y(-t) \quad (4)$$

Como o filtro preditivo de erro depende apenas da autocorrelação da função, os filtros preditivos de erro de $X(t)$, $Y(t)$ e $U(t)$ serão todos iguais. Designando-se este filtro comum como $F(t)$ e lembrando-se que $U(t)$ é uma função de fase mínima, pode-se garantir que:

$$U(t) * F(t) = \text{delta} \quad (5)$$

O objetivo desta demonstração são as equações (17) e (18), que descrevem a interdependência espectral do sinal e do ruído no processo de deconvolução. Será demonstrado que o traço deconvolvido apresenta sempre um espectro de potência branco, sendo o espectro de potência do sinal complementar ao do ruído. É oportuno lembrar que a deconvolução preditiva comporta diversas variações, as quais não serão aqui consideradas. A fim de evitar dúvidas, o leitor deve atentar para os seguintes pressupostos:

- a) a predição será sempre de uma amostra;
- b) $S(t)$ e $N(t)$ são funções estatisticamente não correlatas;
- c) o operador $F(t)$ será considerado como sendo exato, em relação a $U(t)$.

A existência de uma função de fase mínima $U(t)$ cuja autocorrelação é igual a autocorrelação de $X(t)$ é garantida por Robinson & Treitel (1980 — ver p. 76), de onde se pode formular o seguinte teorema: *De todas as funções que apresentam a mesma autocorrelação, existe uma e apenas uma de fase mínima.* Como $R(t)$ tem o espectro de potência branco e $W(t)$ é uma função de fase mínima, o operador $F(t)$ pode ser considerado, a menos de um fator, como o filtro inverso de $W(t) * L(t)$ em (3), podendo ser expresso co-

mo:

$$F(t) = FW(t) * FL(t) \quad (6)$$

onde:

$FW(t)$ = filtro inverso de $W(t)$;

$FL(t)$ = filtro inverso de $L(t)$.

Como $F(t)$ é, também, o filtro preditivo de erro de $X(t)$, o traço deconvolvido $XD(t)$ pode ser computado como:

$$\begin{aligned} XD(t) &= X(t) * F(t) \\ &= R(t) * W(t) * FW(t) * FL(t) + N(t) * F(t) \\ &= R(t) * FL(t) + ND(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Comparando-se (7) com (2), verifica-se que a deconvolução de $X(t)$ foi mal-sucedida, sendo as funções $W(t)$ e $N(t)$ meramente substituídas por $FL(t)$ e $ND(t) = N(t) * F(t)$. Por outro lado, conforme previsto em (5), a função $UD(t)$ resultante da convolução de $U(t)$ com $F(t)$ é uma função delta:

$$UD(t) = U(t) * F(t) = \text{delta} \quad (8)$$

onde, substituindo-se cada função pela sua autocorrelação:

$$AUD(t) = AU(t) * AF(t) = \text{delta} \quad (9)$$

sendo:

$AUD(t)$ = autocorrelação de $UD(t)$;

$AU(t)$ = autocorrelação de $U(t)$;

$AF(t)$ = autocorrelação de $F(t)$.

Analogamente, substituindo-se cada função de (7) pela sua autocorrelação, chega-se a:

$$AXD(t) = AX(t) * AF(t) \quad (10)$$

onde:

$AXD(t)$ = autocorrelação de $XD(t)$;

$AX(t)$ = autocorrelação de $X(t)$.

Como $AU(t)$ é, por definição, igual a $AX(t)$, pode-se concluir, a partir de (9) e (10), que:

$$AXD(t) = AUD(t) = \text{delta} \quad (11)$$

A expressão (11) mostra que a autocorrelação do traço deconvolvido é sempre uma função delta. A partir do teorema da autocorrelação (Bracewell, 1986), pode-se acrescentar que o traço deconvolvido $XD(t)$ terá sempre o espectro de potência branco. Como na autocorrelação de $S(t)$ toda a informação de fase é perdida e é impossível se separar as

contribuições de $R(t)$ e $W(t)$, este resultado permanece válido, mesmo que $R(t)$ não tenha o espectro branco e $W(t)$ não seja de fase mínima.

A partir de (2), pode-se escrever que:

$$AX(t) = AS(t) + AN(t) \quad (12)$$

onde:

$AX(t)$ = autocorrelação de $X(t)$;
 $AS(t)$ = autocorrelação de $S(t)$;
 $AN(t)$ = autocorrelação de $N(t)$.

Nota: as correlações cruzadas envolvendo $S(t)$ e $N(t)$ foram desprezadas devido ao pressuposto de que estas funções não são correlatas.

A partir de (10), (11) e (12), pode-se concluir que:

$$AXD(t) = AS(t) * AF(t) + AN(t) * AF(t) = \text{delta} \quad (13)$$

que pode ser compactada para:

$$AXD(t) = ASD(t) + AND(t) = \text{delta} \quad (14)$$

onde:

$AXD(t)$ = autocorrelação de $XD(t)$;
 $ASD(t)$ = autocorrelação de $SD(t) = S(t) * F(t)$;
 $AND(t)$ = autocorrelação de $ND(t) = N(t) * F(t)$.

Com o auxílio do teorema da autocorrelação, a equação (14) pode ser expressa como:

$$|XD(f)|^2 = |SD(f)|^2 + |ND(f)|^2 = \text{constante} \quad (15)$$

onde:

$|XD(f)|$ = espectro de amplitude de $XD(t)$;
 $|SD(f)|$ = espectro de amplitude de $SD(t)$;
 $|ND(f)|$ = espectro de amplitude de $ND(t)$.

Como o operador que transforma $S(t)$ em $SD(t)$ é o mesmo que transforma $N(t)$ em $ND(t)$, pode-se afirmar que a relação sinal-ruído em cada frequência não se altera com a deconvolução. Conseqüentemente,

$$|SD(f)|^2 / |ND(f)|^2 = |S(f)|^2 / |N(f)|^2 \quad (16)$$

Note-se que isto não significa que a relação sinal-ruído do traço deconvolvido seja igual a do traço de entrada.

A partir de (15) e (16), chega-se, finalmente, às equações que descrevem a interdependência entre os espectros de potência do sinal e do ruído no processo de deconvolução:

$$|SD(f)|^2 = k / (1 + |N(f)|^2 / |S(f)|^2) \quad (17)$$

e

$$|ND(f)|^2 + |SD(f)|^2 = k \quad (18)$$

A partir de (17) e (18), pode-se determinar a fórmula alternativa

$$|ND(f)|^2 = k / (1 + |S(f)|^2 / |N(f)|^2) \quad (19)$$

para o espectro de potência do ruído deconvolvido, a partir de $|S(f)|^2$ e $|N(f)|^2$.