

MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO (RTM)

REVERSE TIME MIGRATION (RTM)

Eduardo Lopes de Faria⁽¹⁾

RESUMO – A migração, processo inverso ao do modelamento, é tradicionalmente realizada mediante a extrapolação em profundidade do campo de ondas ascendentes registrado em superfície. Apresenta-se uma técnica diferente de execução da migração, por meio da propagação reversa no tempo. Utiliza-se a equação completa da onda para realizar a marcha reversa no tempo, o que permite migrar refletores com alto ângulo de mergulho. A equação da onda é resolvida por meio de operadores de diferenças finitas de segunda e quarta ordem. São discutidos os problemas de estabilidade e dispersão relacionados à utilização deste método numérico na solução da equação da onda. O método foi testado em modelos sintéticos e em dados reais.

(Originais recebidos em 15.07.87.)

1 – INTRODUÇÃO

A migração é um processo onde os dados registrados no domínio do tempo, $P(x, z = 0, t)$, são mapeados no domínio da profundidade, $P(x, z, t = 0)$. Desde o começo da década de 50, este assunto tem sido alvo de importantes pesquisas científicas. HAGEDOORN (1954) introduziu o uso das curvas de frentes de ondas e difrações, possibilitando a realização da migração manual de horizontes interpretados em seções sísmicas. Foi, entretanto, a partir do início da década de 70, contando com o auxílio de computadores digitais no tratamento dos dados sísmicos, que esta técnica experimentou um grande avanço.

CLAERBOUT & DOHERTY (1972) e seus colaboradores da Universidade de Stanford foram os primeiros a desenvolver um método de migração computacionalmente viável utilizando operadores de diferenças finitas. Este método tornou-se um marco no desenvolvimento da técnica da migração.

LOEWENTHAL *et alii* (1976) mostraram que a equação da onda poderia ser aplicada para descrever a propagação numa seção de afastamento fonte-receptor

igual a zero. Utilizando um modelo hoje conhecido como "modelo do refletor explosivo", provaram que tal tipo de seção sísmica pode ser obtida por meio de um único experimento. Esse trabalho forneceu base física para os métodos da migração em seções empilhadas que usam a equação da onda.

Vários outros métodos surgiram posteriormente, entre eles a migração que emprega a integral de Kirchhoff (FRENCH, 1975; SCHNEIDER, 1978), a migração no domínio frequência-comprimento de ondas, domínio F-K (STOLT, 1978), a migração por mudança de fase e interpolação, PSPI (GAZDAG & SGUAZZERO, 1984) e a migração reversa no tempo (LOEWENTHAL & MUFTI, 1983; BAYSAL *et alii*, 1983).

Este último método difere dos demais por executar a migração no plano objeto (GAZDAG & CARRIZO, 1985), isto é, por realizar a depropagação do campo de ondas registrados em superfície calculando uma seção em profundidade para cada tempo, a partir do tempo final da seção até o tempo igual a zero, quando a seção em profundidade corresponderá à seção migrada.

Os outros métodos realizam a migração

1 - Setor de Estudos Geofísicos,
Divisão de Tratamento de Dados
Exploratórios, Departamento de
Exploração.

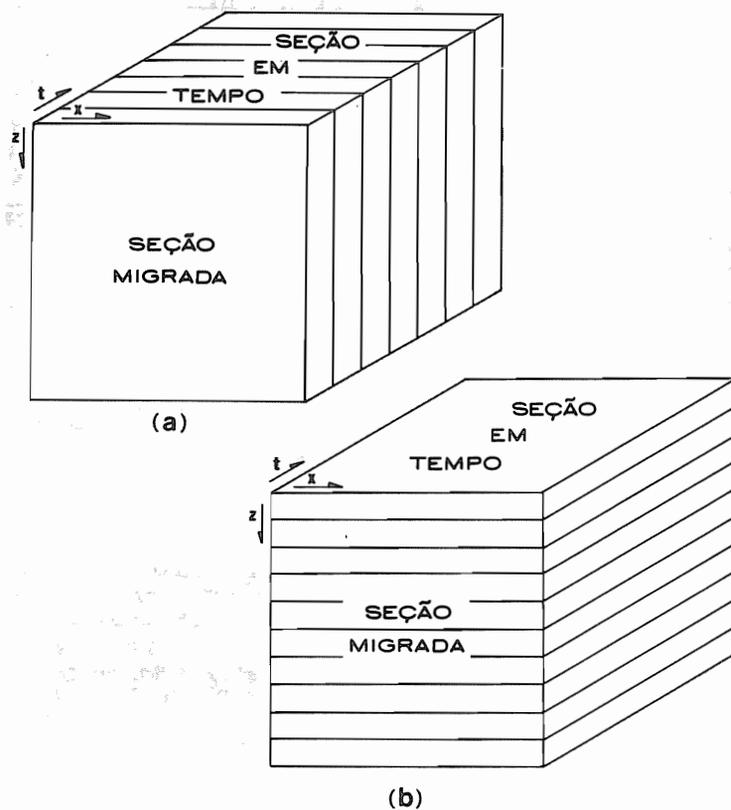


Fig. 1 - (a) Cubo do campo de ondas ilustrando a migração reversa no tempo, onde a seção em profundidade (x, z, t_i) é construída para diversos t_i , e a seção migrada corresponde à seção em profundidade quando $t = 0$; (b) migração através da continuação descendente, onde as seções em tempo (x, z_i, t) são construídas para diversas profundidades. A seção migrada será composta por todos os valores do campo de ondas em $t = 0$ de cada seção.

por meio da continuação descendente do campo de ondas registrado em superfície, ou seja, constroem uma seção sísmica diferente para as diversas profundidades, supondo as fontes e os receptores nestas profundidades, e depois, tomando os valores, em cada uma destas seções, no tempo zero, obtêm uma seção em profundidade migrada. A figura 1 ilustra a diferença entre esses dois procedimentos.

Neste trabalho, discute-se a aplicação da migração reversa no tempo (RTM), utilizando-se a equação completa da onda, resolvida por operadores de diferenças finitas de quarta ordem para as derivadas em relação a x e z e de segunda ordem para a derivada em relação ao tempo.

2 - REPRESENTAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA POR OPERADORES DE DIFERENÇAS FINITAS

Utilizando-se a série de Taylor, pode-se

representar uma função para a pressão, $P(x)$, no ponto $x \pm \Delta x$ como:

$$P(x \pm \Delta x) = P(x) \pm \Delta x \frac{dP}{dx}(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2P}{dx^2}(x) \pm \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3P}{dx^3}(x) + \dots \quad (1)$$

Somando-se $P(x + \Delta x)$ com $P(x - \Delta x)$ tem-se:

$$P(x + \Delta x) + P(x - \Delta x) = 2P(x) + (\Delta x)^2 \frac{d^2P}{dx^2}(x) + 2 \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4P}{dx^4}(x) + \dots \quad (2)$$

A segunda derivada de P em relação a x pode ser então escrita como:

$$\frac{d^2P}{dx^2}(x) = \frac{P(x - \Delta x) - 2P(x) + P(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2, \quad (3)$$

onde

$$O(\Delta x)^2 = (\Delta x)^2 \left\{ \frac{2}{4!} \frac{d^4P}{dx^4}(x) + \frac{2}{6!} \frac{d^6P}{dx^6}(x) + \dots \right\}. \quad (4)$$

Esta derivada pode ser aproximada abandonando-se o termo $O(\Delta x)^2$ na fórmula 3, ou seja:

$$\frac{d^2P}{dx^2}(x) \approx \frac{P(x - \Delta x) - 2P(x) + P(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2}, \quad (5)$$

ou

$$\frac{d^2P}{dx^2}(x) \approx \{T * P(x)\} / (\Delta x)^2, \quad (6)$$

onde o operador $T = \{1, -2, 1\}$.

As fórmulas 5 e 6 apresentam a aproximação por diferenças finitas de segunda ordem para a segunda derivada de P em relação a x .

Para se obter uma aproximação de quarta ordem, ou um operador de diferenças finitas de quarta ordem, deve-se substituir o segundo termo da equação 3 pelo operador de segunda ordem, equação 6, ou seja:

$$\frac{2(\Delta x)^2}{4!} \frac{d^4P}{dx^4}(x) \approx - \{T * T * P(x)\} / 12 (\Delta x)^2, \quad (7)$$

e somar à equação 6, ficando:

$$\frac{d^2P}{dx^2}(x) \approx T * \left\{ P(x) - \frac{1}{12} [T * P(x)] \right\} / (\Delta x)^2. \quad (8)$$

A equação bidimensional da onda pode ser escrita como:

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2}{\delta t^2} \right) P(x, z, t) = 0. \quad (9)$$

Substituindo-se as variáveis x, z e t pelas variáveis discretas $m\Delta x, j\Delta z$ e $n\Delta t$, onde m, j e n representam índices das amostras, o campo de pressão pode ser representado por:

$$P(x, z, t) = P(m\Delta x, j\Delta z, n\Delta t). \quad (10)$$

Para facilitar a notação, o campo de pressão será referenciado por $P_{m,j}^n$.

Substituindo-se as derivadas parciais em relação a x e z por operadores de diferenças finitas de quarta ordem e a derivada em relação a t pelo operador de segunda ordem, a equação da onda pode ser escrita como:

$$T_m * \left\{ P_{m,j}^n - 1/12 [T_m * P_{m,j}^n] \right\} / (\Delta x)^2 + T_j * \left\{ P_{m,j}^n - 1/12 [T_j * P_{m,j}^n] \right\} / (\Delta z)^2 - [T^n * P_{m,j}^n] / c^2 (\Delta t)^2 = 0. \quad (11)$$

3 - MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO (RTM)

A migração reversa no tempo utiliza a seção sísmica real como condição de contorno e realiza a migração no plano objeto, calculando, a partir do tempo final da seção, o campo de ondas para cada instante de tempo, até o tempo igual a zero. A seção em profundidade em $t = 0$ corresponde à seção migrada, $P(x, z, t = 0)$.

Esta marcha reversa no tempo pode ser realizada por intermédio da equação da onda. Tomando-se a equação 11 em sua forma explícita, tem-se que:

$$P_{m,j}^{n-1} = [2 - 2,5 (Ax + Az)] P_{m,j}^n - P_{m,j}^{n+1} Ax/12 [16 (P_{m-1,j}^n + P_{m+1,j}^n) - (P_{m-2,j}^n + P_{m+2,j}^n)] + Az/12 [16 (P_{m,j-1}^n + P_{m,j+1}^n) - (P_{m,j-2}^n + P_{m,j+2}^n)]. \quad (12)$$

onde

$$Ax = \left(\frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \quad e \quad Az = \left(\frac{c \cdot \Delta t}{\Delta z} \right)^2.$$

A equação 12 proporciona o cálculo do campo de ondas no instante $(n - 1) \Delta t$ a partir dos campos de ondas em $n \Delta t$ e $(n + 1) \Delta t$. O processo inicia-se com o campo de ondas totalmente zerado, para $t > t_f$, onde t_f representa o tempo final da seção sísmica. Para $t = t_f$, apenas a primeira linha será diferente de zero, ou seja, $P(x, z = 0, t = t_f) \neq 0$, o que cor-

responde aos valores da seção registrada em $t = t_f$. Aplicando-se a marcha reversa no tempo, podem-se calcular os valores do campo de ondas ascendentes para cada tempo, isto é, é possível calcular $P(x, z, t = t_i)$, i variando de $t_f/\Delta t$, Δt igual ao intervalo de amostragem, até zero, onde $t = 0$, e tendo a seção registrada, $P(x, z = 0, t)$, como condição de contorno.

O processo acima descreve a migração em profundidade. Para se realizar a migração em tempo, deve-se substituir z por $\tau = z/c$, onde τ corresponde ao tempo de percurso na direção z . A equação da onda se transforma em:

$$\left[c \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta \tau^2} - \frac{\delta^2}{\delta t^2} \right] P(x, \tau, t). \quad (13)$$

Esta equação pode ser apresentada também sob a forma de diferenças finitas, tal como na equação 12, redefinindo-se a constante Az como:

$$Az = (\Delta t / \Delta \tau)^2. \quad (14)$$

A utilização de operadores numéricos na despropagação deve ser efetuada, entretanto, com certo cuidado, para assegurar a estabilidade do processo e evitar a dispersão numérica. A estabilidade da equação 12 estará assegurada se $Ax + Az \leq 0,75$ (FARIA, 1986) (anexo A).

A equação da onda tem como soluções tanto o campo de ondas descendente como o ascendente. Assim, para evitar o aparecimento de reflexões múltiplas originadas no processo, é necessário que a propagação se faça em apenas uma direção. Deve-se, então, suavizar o modelo de impedância acústica utilizado (anexo B), para evitar o aparecimento do campo de ondas refletido.

Para contornar este problema, BAYSAL *et alii* (1983) utilizaram a equação unidirecional da onda (GAZDAG, 1981), que é:

$$\pm \left[\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \right]^{1/2} P(x, z, t) = \frac{1}{c} \frac{\delta P(x, z, t)}{\delta t}. \quad (15)$$

O operador dentro da raiz quadrada não possui, entretanto, representação espacial, e a derivada em relação a t pode ser escrita como:

$$\frac{\delta P}{\delta t} = c F^{-1} \left\{ i \operatorname{sgn}(K_z) [K_x^2 + K_z^2]^{1/2} F[P] \right\}, \quad (16)$$

onde F e F^{-1} representam os operadores das transformadas direta e inversa de Fourier. Obtida esta derivada, para um determinado tempo T , o valor do campo de pressão no tempo $T - \Delta t$ pode ser obtido pela aproximação da derivada por diferenças finitas de primeira ordem, ou seja:

$$P(x, z, t = T - \Delta t) = P(x, z, t = T + \Delta t) - 2 \Delta t \frac{\delta P}{\delta t}(x, z, t = T). \quad (17)$$

Este processo é computacionalmente lento, por envolver a transformada dupla de Fourier e sua inversa para o campo de pressão em cada intervalo de tempo.

4 - MODELOS SINTÉTICOS

O método foi testado numa seção em tempo resultante da convolução de um *spike* com uma função da fonte (fig. 2). A figura 3 ilustra o resultado da aplicação da migração reversa no tempo sobre a seção da figura 2. O resultado obtido corresponde à resposta ao impulso do algoritmo. Nota-se a boa qualidade da resposta, inclusive para propagação de alto ângulo, o que se deve ao emprego da equação completa da onda.

Foram gerados nove sismogramas sintéticos sobre um modelo de três camadas com velocidades de $V_1 = 2000$ m/s, $V_2 = 2500$ m/s e $V_3 = 3000$ m/s, utilizando-se uma malha regular com espaçamento de 20 m entre pontos e intervalo de amostragem em tempo igual a 4 milissegundos. Estes sismogramas, após passarem pelos processos de correção de sobretempo normal (NMO) e empilhamento, originaram duas seções, com graus de cobertura de 500 e 900%, respectivamente (figs. 4a e 4b). Nota-se a melhoria na definição do refletor incli-

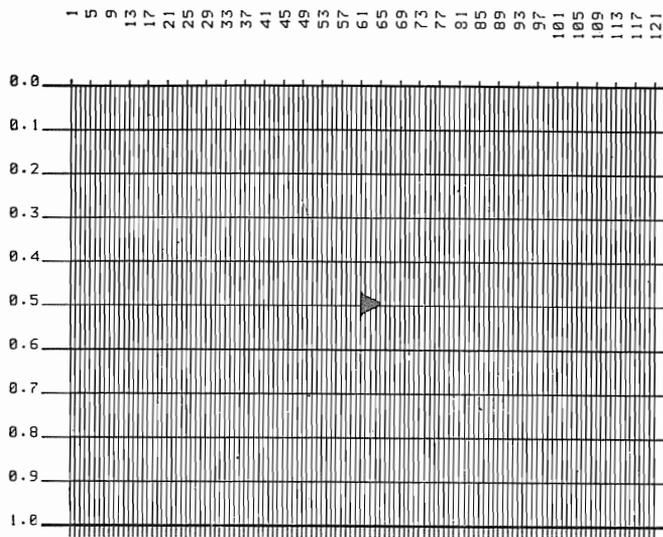


Fig. 2 - Seção em tempo mostrando um ponto.

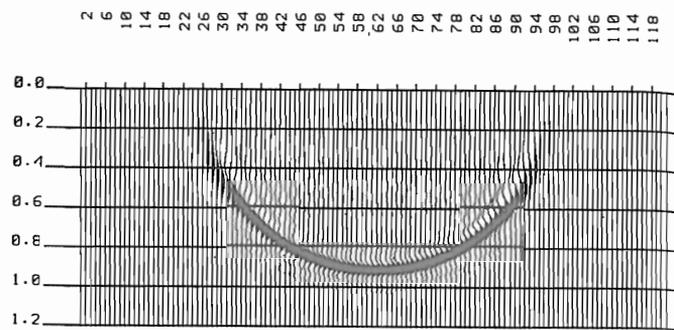


Fig. 3 - Resposta da migração reversa no tempo aplicada à seção da figura 2.

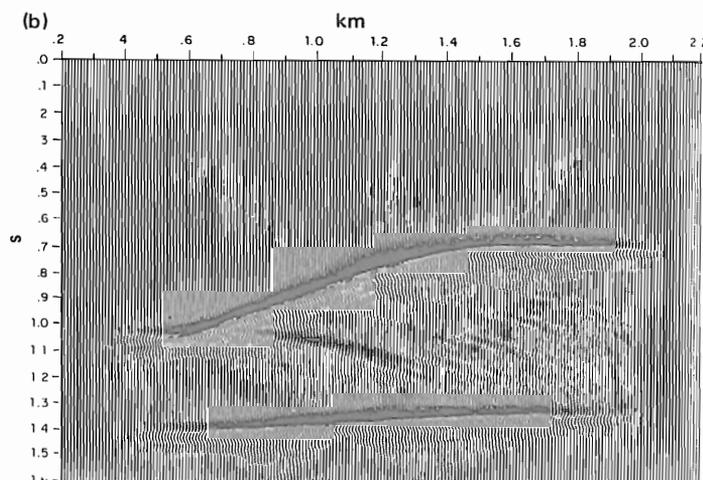
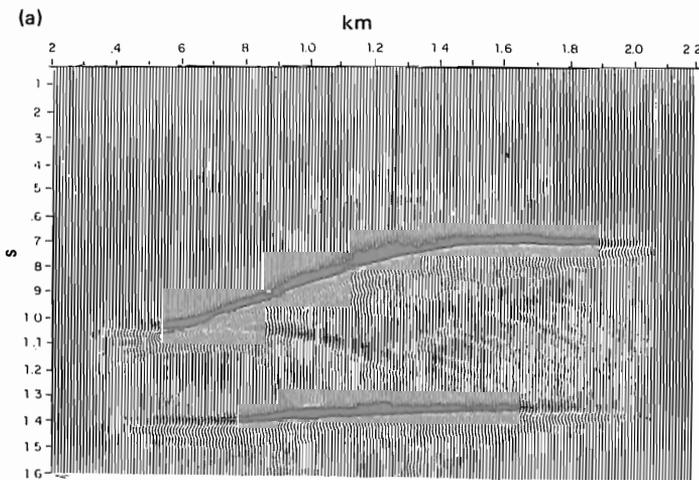


Fig. 4 - Seções empilhadas sintéticas: (a) seção gerada com grau de cobertura igual a 500%; (b) seção gerada com grau de cobertura de 900%.

nado ao se utilizar um grau de cobertura maior.

A migração foi aplicada sobre os dados resultantes por intermédio de uma malha de pontos regular, com espaçamento de 10 m e velocidades intervalares iguais à metade das velocidades do modelo, suavizadas segundo o procedimento descrito no anexo B. Estes parâmetros permitiram trabalhar abaixo do limite de estabilidade, $A_x + A_z = 0,72$. Os resultados acham-se nas figuras 5a e 5b, que correspondem à migração das seções das figuras 4a e 4b, respectivamente. É interessante notar que os resultados se equivalem, e que o segundo refletor não foi corretamente migrado, apresentando mergulho na região abaixo da parte inclinada da primeira interface. Isto se deve ao fato de que os processos de correção do sobretempo normal (NMO) e

empilhamento, em regiões onde as camadas geológicas apresentam mergulho, geram uma seção sísmica que não representa corretamente o campo de ondas em superfície, distanciando-se de uma seção de afastamento fonte-receptor igual a zero, premissa de qualquer migração após o empilhamento. Nestes casos, a migração antes do empilhamento constitui uma ferramenta poderosa no processamento sísmico (FARIA *et alii*, 1986).

5 - DADOS REAIS

Para avaliar o desempenho da migração reversa no tempo em dados reais, foi escolhido um trecho de uma linha sísmica registrada na Bacia do Recôncavo, Bahia.

A área é composta principalmente por folhelhos e arenitos, em camadas homo-

gêneas e inclinadas, apresentando falhas normais.

A seção empilhada é apresentada na figura 6. O espaçamento entre traços é de 25 m, e o intervalo de amostragem, de 4 ms. O processamento até esta fase constou de: desmultiplexação dos dados de campo; deconvolução preditiva, com distância de predição igual a 16 ms; correções estáticas; correção de NMO e empilhamento; deconvolução após o empilhamento e filtragem de frequência.

O modelo de velocidades intervalares — obtido a partir de informações de poços, análises de velocidades e migração iterativa (BERKOUT, 1984) — possibilitou um refinamento no campo de velocidades e, depois de suavizado, foi empregado na migração final (fig. 7).

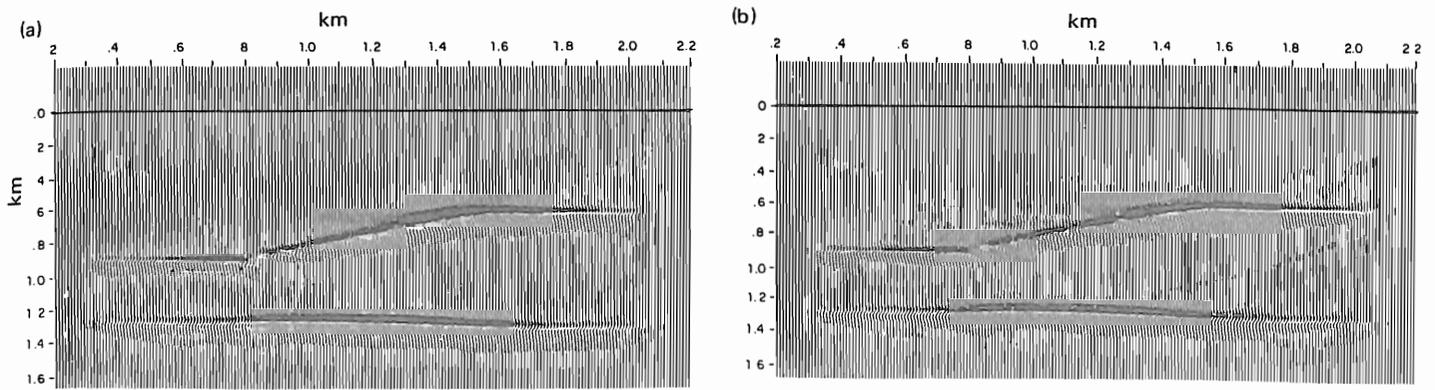


Fig. 5 - Migração reversa no tempo aplicada às seções empilhadas sintéticas: (a) cobertura de 50%; (b) cobertura de 90%.

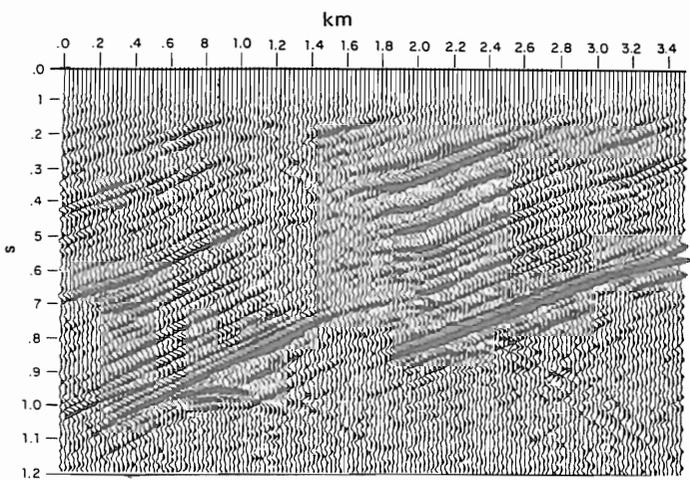


Fig. 6 - Seção empilhada em tempo da Bacia do Recôncavo.

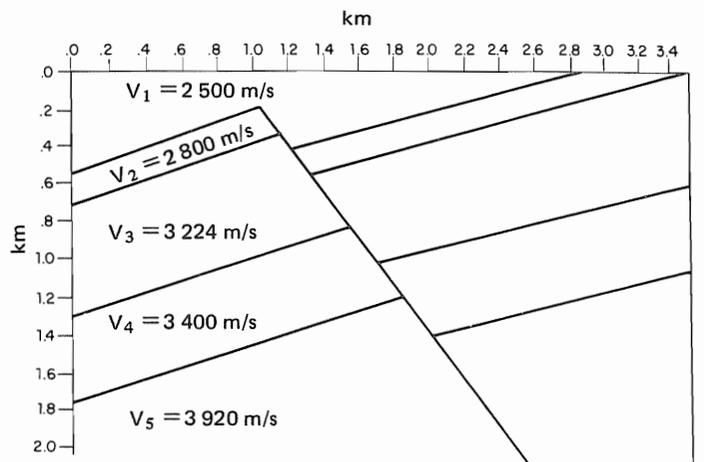


Fig. 7 - Modelo de velocidades intervalares utilizado na migração.

Foram utilizadas três malhas de pontos em profundidade, com diferentes valores de Δz , numa tentativa de minimizar o efeito de dispersão. Na primeira malha, o valor de Δx foi de 25 m, e o de Δz igual a 12,5 m. Considerando-se que o maior valor de velocidade intervalar é 3 920 m/s, $Ax + Az = 0,49172$, inferior, portanto, ao limite de estabilidade, que é de 0,75. Tais valores permitiram usar uma malha mais fina, com $\Delta z = 10$ m e $Ax + Az = 0,67$, ainda inferior ao limite de estabilidade. Modificando-se ligeiramente o modelo de velocidade, igualando-se a última velocidade intervalar à anterior, ou seja, $V_5 = V_4 = 3 400$ m/s, foi possível empregar uma malha de pontos com $\Delta z = 8,3$ m. Os resultados das migrações com as diferentes malhas estão apresentados nas figuras 8, 9 e 10.

Analisando-se o resultado obtido, nota-

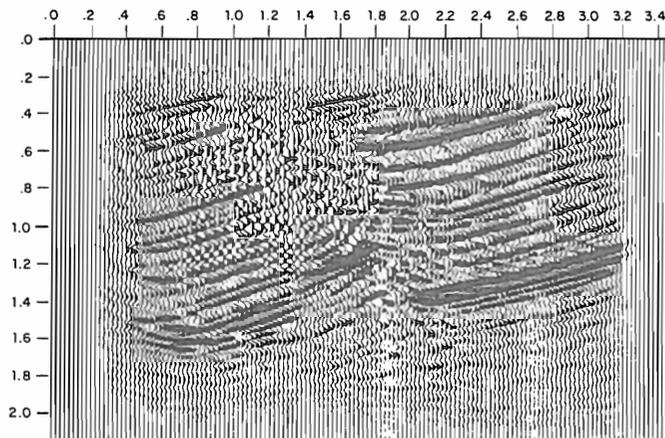


Fig. 8 - Seção migrada em profundidade com uma malha de pontos igual a $x = 25$ m e $z = 12,5$ m.

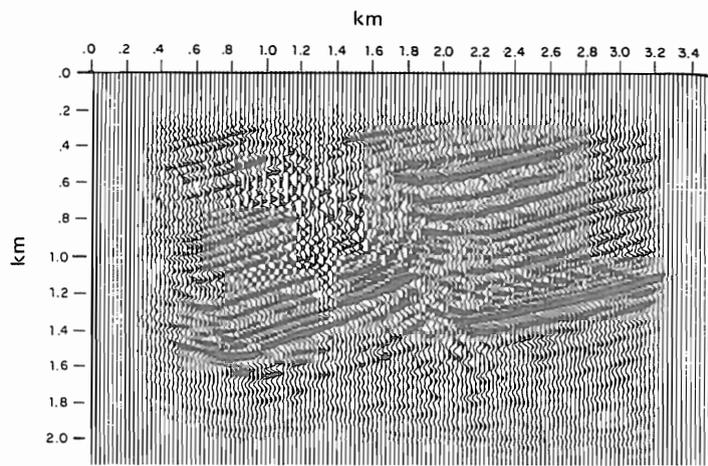
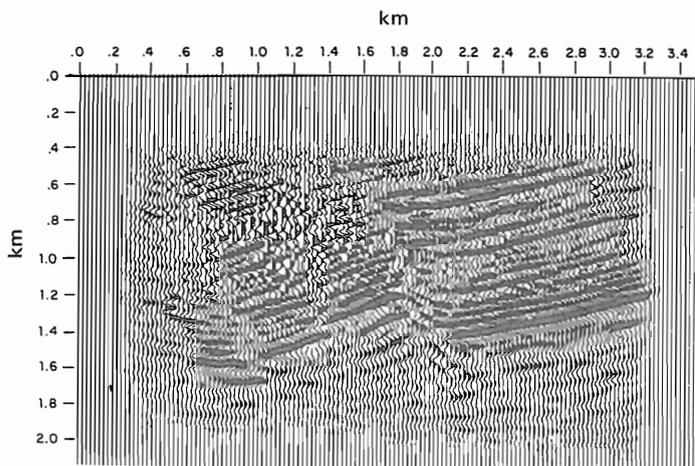


Fig. 9 - Seção migrada em profundidade com uma malha de pontos igual a $x = 25$ m e $z = 10$ m.

Fig. 10 - Seção migrada em profundidade com uma malha de pontos igual a $x = 25$ m e $z = 8,3$ m.

se que, quando $\Delta z = 8,3$ m (fig. 10), a dispersão ocorre em direção contrária, ou seja, as altas frequências passam a ter velocidade de propagação maior que a original. Este fenômeno, apresentado no anexo A, pode ser notado na figura 8, observando-se o refletor do embasamento, a 1,2 e 1,4 km de profundidade, onde os componentes de alta frequência, por terem viajado com velocidades maiores que a velocidade real de propagação, aparecem mais profundos que o refletor.

Para obter um bom resultado, não basta diminuir o valor de Δz até o mínimo permitido pelo limite de estabilidade. Sugere-se que $\Delta x + \Delta z$ se situe próximo a 0,6, o que possibilitará a migração correta de eventos com frequências altas e pouca dispersão numérica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAYSAL, E.; KOSLOFF, D. D.; SHERWOOD, J. Reverse time migration. *Geophysics*, 48: 1514-24, 1983.
 BERKHOUT, A. J. *Seismic migration*; practical aspects. Amsterdam, Netherlands Elsevier, 1984.
 CLAERBOUT, J. F. & DOHERTY, S. M. Downward continuation of moveout-corrected seismographs. *Geophysics*, 37: 741-68, 1972.
 FARIA, E. L. *Migração antes do empilhamento utilizando propagação reversa no tempo*. Salvador, UFBA, 1986. Tese de Mestrado.
 FARIA, E. L.; STOFFA, P. L.; LOEWENTHAL, D. Migration before

stack using reverse time propagation. *In: ANNUAL SOCIETY OF EXPLORATION GEOPHYSICS INTERNATIONAL MEETING*, 56, Houston, 1986. ...
 FRENCH, W. S. Computer migration of oblique seismic reflection profiles. *Geophysics*, 40: 961-80, 1975.
 GAZDAG, J. Modeling of the acoustic wave equation with transform methods. *Geophysics*, 46: 854-9, 1981.
 GAZDAG, J. & CARRIZO, E. *Comments on reverse-time migration*. Palo Alto, IBM Scientific Center, 1985.
 GAZDAG, J. & SQUAZZERO, P. Migration of seismic data by phase shift plus interpolation. *Geophysics*, 49: 124-31, 1984.
 HAGEDOORN, J. G. A process of seismic reflection interpretation. *Geophys. Prospect.*, 2: 85-127, 1954.
 KOSLOFF, D. D. & BAYSAL, E. Migration with the full acoustic wave equation. *Geophysics*, 48: 677-87, 1983.

LOEWENTHAL, D.; LU, L.; ROBERTSON, R.; SHERWOOD, J. W. The wave equation applied to migration. *Geophys. Prospect.*, 24: 380-99, 1976.
 LOEWENTHAL, D. & MUFTI, J. R. Reversed time migration in spacial frequency domain. *Geophysics*, 48: 627-35, 1983.
 SCHNEIDER, W. A. Integral formulation for migration in two and three dimensions. *Geophysics*, 43: 49-76, 1978.
 STOLT, R. H. Migration by Fourier transformation. *Geophysics*, 43: 23-48, 1978.

BIBLIOGRAFIA

GAZDAG, J. Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics*, 43: 1342-51, 1978.
 LOEWENTHAL, D.; STOFFA, P. L.; FARIA, E. L. Suppressing the unwanted reflections of the full wave equation. *Geophysics*, 52: 1007-12, 1987.

ABSTRACT

Migration is a process whereby events in time domain, $P(x, z = 0, t)$ are mapped into depth domain, $P(x, z, t = 0)$, and is traditionally done through a downward continuation of the surface data. The migrated section is given by the amplitude of the extrapolated wavefield at zero time as a function of depth (CLAERBOUT & DOHERTY, 1972; STOLT, 1978; GAZDAG, 1978).

The basis of stacked section migration is a model named "Exploding Reflector Model" (LOEWENTHAL et alii, 1976). By this concept, an approximation of a stacked section can be obtained through a single physical experiment which replaces the sources at the horizons, uses half the actual velocities in the earth, and initiates the exploding of sources at zero time on all reflecting boundaries. The receivers are maintained on surface, and the recorded section will be a zero offset one.

The imaging principle associated with the migration of stacked sections allows to be carried out using the reverse marching instead of a depth extrapolation. In the reverse time migration (RTM), the stacked section is regarded as a surface boundary condition. The process is executed in reversed time from the final time of the section until the zero time, when the wavefield, $P(x, z, t = 0)$, is considered the final migrated section. More specifically, in the reverse marching schemes, the wavefield in space at a particular time step is determined from values of the wavefield at latter time steps.

The reverse time migration may offer some improvements upon the conventional depth extrapolation. In

particular, it can avoid the problems related to evanescent energy (KOSLOFF & BAYSAL, 1983).

There are several possibilities of choosing a wave equation to be used in migration. BAYSAL et alii, 1983, for example, used the one-way equation. This paper presents an approach to reverse time migration using the full wave equation solved by fourth order finite difference operators to spacial derivatives and second order to the time derivative.

The finite difference operators are obtained by truncation of Taylor series. A second derivative can be represented by:

$$d^2P/dx^2 = \{ T * P(x) \} / (\Delta x),$$

where the operator T is defined by

$$\{ 1, -2, 1 \}$$

This formula represents the second order finite difference approximation to the derivative. The fourth order finite difference operator is given by:

$$d^2P/dx^2 = T * \{ P(x) - 1/12 [T * P(x)] \} / (\Delta x).$$

The complete wave equation can be expressed using these finite difference operators. It allows the migration of the steep dip events; however, the velocity field must be smoothed in order to avoid the spurious reflected wavefield generated in the reverse time propagation.

The stability limit of explicit finite difference wave equation will be given by:

$$Ax + Az \geq 0.75,$$

where $Ax = (c \cdot \Delta t / \Delta x)^2$
 $Az = (c \cdot \Delta t / \Delta z)^2$, where c is the velocity of propagation, Δt , the sample rate and $(\Delta x, \Delta z)$ are the grid sizes.

A single spike was migrated to show the response of the reverse time migration. It is possible to see that the steep dip events were well migrated. A synthetic stacked section, obtained from several NMO corrected synthetic shot gathers was also used to show the performance of the RTM method. Since the CMP stacked section does not exactly correspond to a zero offset section, but an approximation, the second horizon was mispositioned. In this case, migration before stacking is better than migration after stacking because the NMO and stacking process are not executed, and do not use the "Exploding Reflector Model", once the shot gather is a single physical experiment.

An actual stacked section from the Recôncavo Basin was migrated using three different grid sizes. The velocity field was obtained from velocity analyses, sonic logs and from iterative modeling. The effect of numerical dispersion on these results can be noted. This dispersion, related to grid sizes, propagation velocity, frequency and angle of propagation, causes wavelet distortions during the propagation.

Stability and numerical dispersion are demonstrated and discussed in the appendix.

ANEXO A

ESTABILIDADE E DISPERSÃO NUMÉRICA

● Estabilidade

O campo de ondas P (x, z, t) pode ser representado pela função de Fourier:

$$P(x, z, t) = \beta(t) \exp[-i(K_x x - K_z z)], \quad (A1)$$

ou sob a forma discreta:

$$P_{m,j}^n = \beta^n \exp[-i(K_x m \Delta x - K_z j \Delta z)], \quad (A2)$$

onde β representa coeficientes de Fourier.

Substituindo-se a equação A2 na equação da onda aproximada por diferenças finitas (eq. 12) e executando-se um pouco de álgebra, obtém-se:

$$\beta^2 - 2H\beta + 1 = 0, \quad (A3)$$

onde

$$H = 1 + \frac{Ax}{24} (-64 \sin^2 \theta + 4 \sin^2 2\theta) + \frac{Az}{24} (-64 \sin^2 \psi + 4 \sin^2 2\psi) \quad (A4)$$

$$\theta = \frac{K_x \Delta x}{2} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{K_z \Delta z}{2}$$

Verifica-se que $H \leq 1$, e a solução da equação A3 é:

$$\beta_1 = H + (H^2 - 1)^{1/2} \quad \text{e} \quad \beta_2 = H - (H^2 - 1)^{1/2}.$$

Para que a equação A2 seja estável, é necessário que $|\beta| < 1$. Como Ax, Az, θ e ψ são reais e $H \leq 1$, quando $H < -1$, $|\beta_2| > 1$, o que torna o processo instável, então H deve ser

$$-1 \leq H \leq 1$$

ou

$$Ax (16 \sin^2 \theta - \sin^2 2\theta) + Az (16 \sin^2 \psi - \sin^2 2\psi) \leq 12$$

Substituindo-se Ax por $Az (\Delta z / \Delta x)^2$, tem-se que:

$$Az \leq \frac{12}{[(\Delta z / \Delta x)^2 (16 \sin^2 \theta - \sin^2 2\theta) + (16 \sin^2 \psi - \sin^2 2\psi)]} \quad (A5)$$

Pode-se verificar que o denominador à direita da inequação possui máximo quando $\theta = \psi = 90^\circ$,

$$Az \leq \frac{12}{16 [(\Delta z / \Delta x)^2 + 1]}$$

ou seja, $Ax + Az \leq 3/4$.

A inequação obtida estabelece a condição de estabilidade para a equação da onda expressa sob a forma de diferenças finitas (eq. 12).

● Dispersão numérica

Num meio isotrópico, as velocidades de fase e de grupo são iguais e independentes da frequência, ou seja:

$$V_f = \frac{W(K)}{K} = \frac{K V_0}{K} = V_0$$

e

$$v_g = \frac{\delta W(K)}{\delta K} = \frac{\delta (KV_0)}{\delta K} = v_0$$

Entretanto, na solução numérica da equação da onda por meio de operadores de diferenças finitas, as velocidades de fase e de grupo passam a ser função do espaçamento entre os pontos da malha, da freqüência do sinal e do ângulo de propagação, gerando dispersão numérica no sinal propagado.

As figuras 1a e 1b apresentam a variação das velocidades de fase e de grupo normalizadas, respectivamente, para a equação da onda sob a forma de diferenças finitas de quarta ordem para as derivadas espaciais e de segunda ordem para a derivada em relação ao tempo, considerando-se a propagação na vertical, $\theta = 0$, e diversas malhas Δz variando de 8,33 a 25 m. A velocidade real é igual a 2 000 m/s.

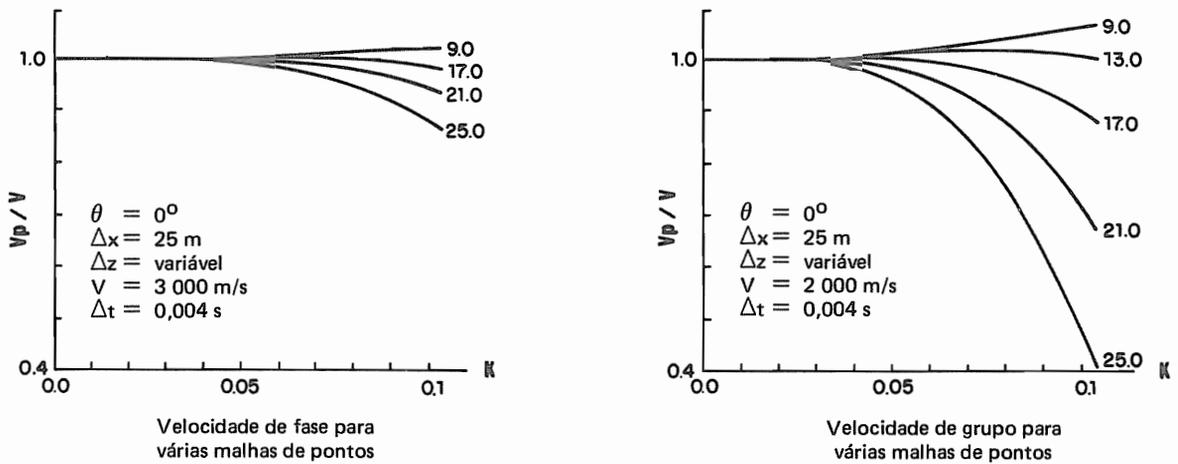


Fig. 1 - (a) Velocidade de fase normalizada versus número de ondas para diversas malhas de pontos; (b) velocidade de grupo versus número de ondas para diversas malhas de pontos.

Constata-se que, quando diminui o valor de Δz , diminui o efeito da dispersão para valores maiores de K . Entretanto, para valores de Δz menores que 13 m, nota-se a inversão da curva, ou seja, as velocidades de fase e principalmente de grupo aumentam para números de ondas maiores. Isto corresponde, visualmente, a inverter a posição do resíduo de dispersão, que passa a aparecer na frente do sinal principal, ao contrário do que acontece mais freqüentemente, onde o resíduo vem atrás.

As figuras 2a e 2b mostram a variação das velocidades de fase e de grupo quando a malha é $\Delta x = 25$ m e $\Delta z = 12,5$ m, velocidade real de 2 000 m/s e diversos ângulos de inclinação. Nota-se que, para esta malha específica, a propagação com ângulos maiores que 45° apresenta mais dispersão.

Considerando-se que variações da ordem de 1% nas velocidades não causam dispersão nos dados, pode-se adotar a seguinte relação, segundo a qual, para aproximação de quarta ordem da equação da onda:

$$G_x = \frac{v}{\Delta x f \cos \theta} > 5 \quad \text{e} \quad G_z = \frac{v}{\Delta z f \sin \theta} > 5$$

onde f é a freqüência máxima corretamente migrada, G_x o número de pontos na direção x , e G_z na direção z .

Como, em geral, a propagação se faz com ângulos próximos de zero, normalmente G_x é muito grande, pois $\sin \theta$ tende para zero. Deve-se, então, observar a imposição sobre G_z .

Como se vê, não basta diminuir o valor de Δz para que se realize a propagação sem dispersão. Aconselha-se que $A_x + A_z \approx 0,6$, evitando assim a propagação das altas freqüências com velocidade maior que a real.

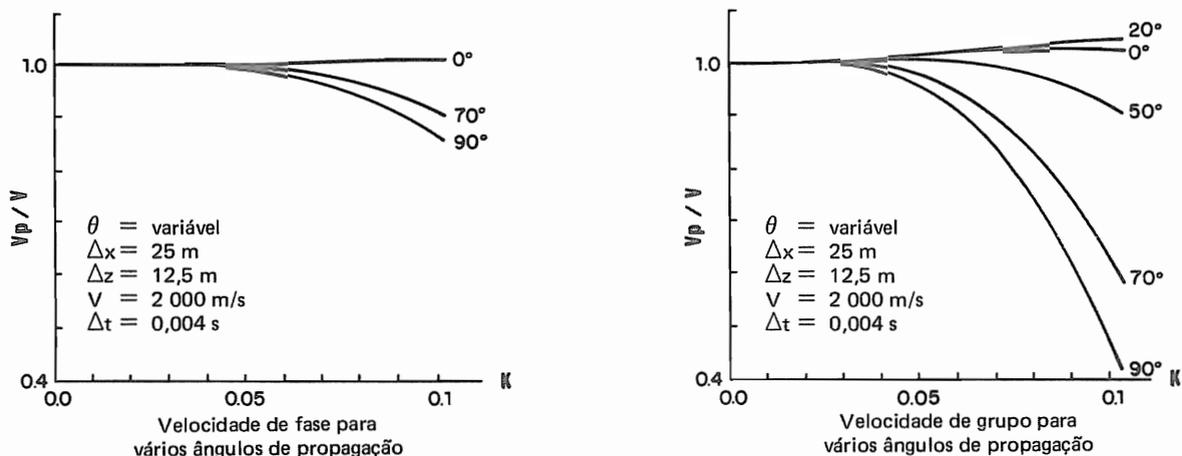


Fig. 2 - (a) Velocidade de fase normalizada versus número de ondas; (b) velocidade de grupo versus número de ondas para vários ângulos de propagação.

ANEXO B

PROPAGAÇÃO SEM REFLEXÃO COM USO DA EQUAÇÃO COMPLETA DA ONDA

No processamento sísmico, às vezes é necessário obter os campos de ondas ascendentes e descendentes em separado, como no caso da migração. Para tanto, alguns métodos de migração conhecidos utilizam a equação unidirecional da onda (GAZDAG, 1978).

LOEWENTHAL *et alii* (1987) apresentaram um método simples para evitar reflexões indesejáveis que surgem na propagação através de uma interface que separa dois meios com velocidades diferentes. O método, que considera a densidade constante, é baseado na suavização do campo de vagarosidade do meio.

A suavização deve ser realizada sobre a vagarosidade, utilizando-se um operador de comprimento igual ao comprimento de onda do principal componente da fonte.

O traço a da figura 1 apresenta um campo de pressão unidimensional num determinado tempo após ocorrer a reflexão. O meio é dividido em duas partes, a superior com velocidade $V_1 = 1\ 000\text{ m/s}$ e a inferior com velocidade $V_2 = 2\ 000\text{ m/s}$. A fonte possui 21 pontos da malha no meio superior e se propaga para baixo, onde é refletida na interface e também transmitida para o meio inferior, onde a onda é contraída para a metade do tamanho original. O traço b mostra o resultado obtido após a suavização da velocidade de propagação, através da convolução com um operador de 21 pontos. Nota-se que a onda refletida desaparece completamente. Entretanto, o evento transmitido encontra-se incorretamente posicionado, se comparado com o resultado anterior. Para evitar este erro, a suavização pode ser realizada com o mesmo operador, porém sobre o campo de vagarosidade. O traço c apresenta o resultado de tal procedimento. Nota-se que o evento agora se encontra corretamente posicionado.

A explicação do fato de ser mais apropriada a suavização na vagarosidade do que na velocidade está ilustrada na figura 2. Esta mostra a função vagarosidade com a suavização realizada sobre a função velocidade (linha tracejada), e a função vagarosidade suavizada (linha pontilhada). A integral destas curvas em relação à profundidade fornece o tempo de trânsito:

$$t = \int_0^z \mu(h) dh$$

onde μ (h) é a vagarosidade.

A integral da função vagarosidade original (linha contínua) e a integral da função vagarosidade suavizada são iguais após z_1 , ao passo que a integral da função vagarosidade suavizada sobre a função velocidade difere da original, resultando no erro de posicionamento.

Estes resultados equivalem aos obtidos com a utilização da equação unidirecional da onda.

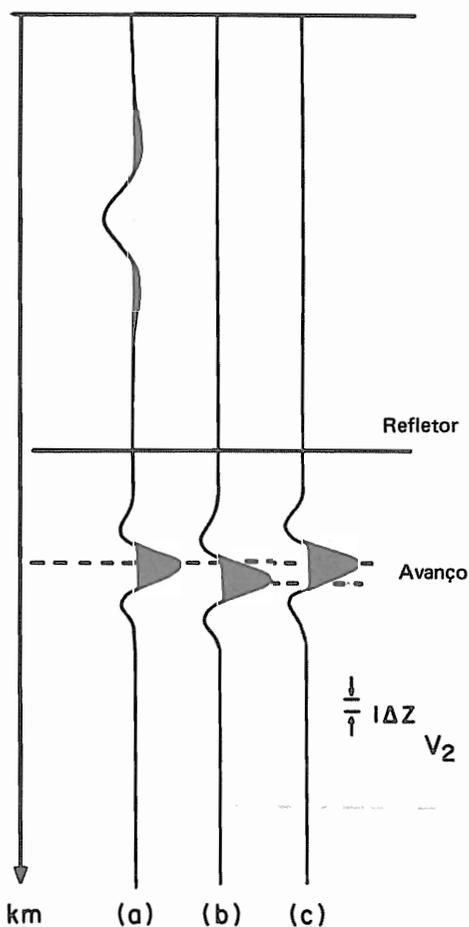


Fig. 1 - Propagação unidimensional através de uma interface com relação de velocidades, V_1/V_2 , igual a 2; (a) traço com reflexão; (b) traço com o campo de velocidades suavizado; (c) traço com o campo de vagarosidade suavizado.

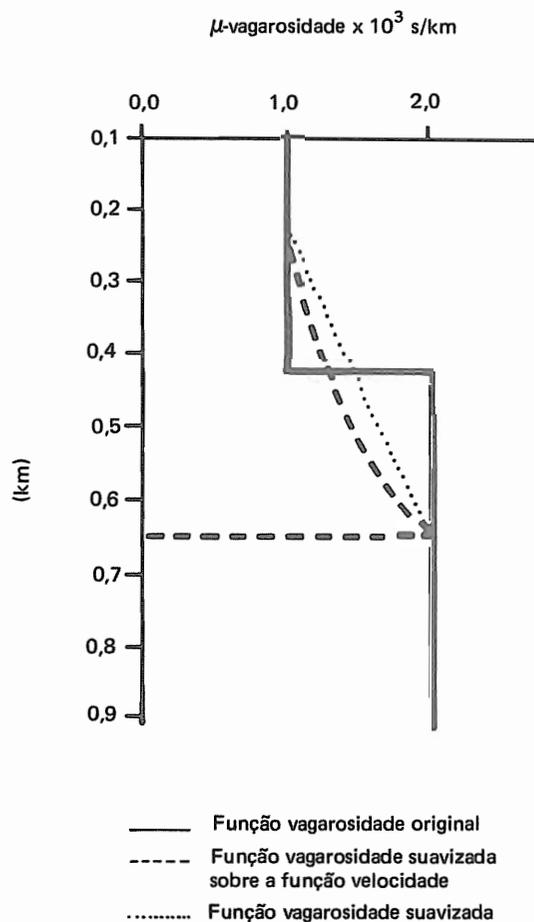


Fig. 2 - Curvas de vagarosidade versus profundidade.

